Απειροστικός Λογισμός Ι — Μάθημα 26 — 18/01/2016 ①

Ασκήσεις 2ου φυλλαδίου

Άσκηση 3: Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό δείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+7$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=6$.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $\delta=\varepsilon/3$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$ ισχύει $|f(x)-f(x_0)|=|(3x+7)-(3x_0+7)|=|3(x-x_0)|=$

$=3|x-x_0|\leq 3\cdot\delta=3\cdot\varepsilon/3=\varepsilon$. Άρα, η f συνεχής στο $x_0=6$.

Άσκηση 4: Δείξτε, με χρήση αποκλειστικά του ορισμού, ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt[8]{x}}=0$

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $M=\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^8$

Τότε $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x>M$

ισχύει $\left|\frac{6}{\sqrt[8]{x}}-0\right|<\varepsilon$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt[8]{x}}=0$.

$\left|\frac{6}{\sqrt[8]{x}}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow$

$\frac{6}{\sqrt[8]{x}}<\varepsilon \Rightarrow$

$\sqrt[8]{x}>\frac{6}{\varepsilon} \Rightarrow$

$x>\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^8$

Άσκηση 5: Έστω $a\geq 0$. Δείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό, ότι $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. [Να εξετάσετε χωριστά τις περιπτώσεις $a=0$ και $a>0$.].

Απόδειξη:

$a=0$: Θ.δ.ο. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

Έστω $\varepsilon>0$. Ορίζουμε $\delta=\varepsilon^2>0$ $\forall x\in[0,+\infty)$: $|x-0|<\delta$

$|\sqrt{x}-0|=\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$. Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

$a>0$: Έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\delta=\varepsilon\sqrt{a}$ $\forall x\in(0,+\infty)$: $|x-0|<\delta$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\delta}{\sqrt{a}}=\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon.$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$.

Άσκηση 7: Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ για $x<2$ και $f(x)=3+x$ για $x\geq 2$.
(i) Υπολογίστε τα πλευρικά όρια της f στο 2 και δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής στο 2.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι ασυνεχής στο 2 χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς.

Απόδειξη:

α) Για να είναι συνεχής η f στο 2 πρέπει:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Όμως, $f(2)=5$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3+x) = 3+2=5$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

Άρα, η f ασυνεχής στο 2. (Ειδικότερα, η f είναι συνεχής από τα δεξιά στο 2 αλλά όχι από τα αριστερά.)

β) Πρέπει να βρούμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ με $x_n\to 2$ και $f(x_n)\not\to f(2)$.

Θέτουμε $x_n = 2-\frac{1}{n}$ (είναι $x_n<2$ $\forall n$) τότε $x_n\to 2$

$f(x_n) = \left(2+\frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow 4 \neq 5 = f(2)$. Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο 2.

Άσκηση 8: Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις. (Αν είναι αληθής να την αποδείξετε, αν είναι ψευδής βρείτε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.) Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής.

ΑΛΗΘΗΣ: 1ος τρόπος

Η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $h(x)=|x|$ είναι συνεχής. Άρα, η $\underset{|f|}{\underset{\shortparallel}{h\circ f}}$ συνεχής.

2ος τρόπος με τον ορισμό

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Θ.δ.ο. η f συνεχής στο x_0.

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η f συνεχής στο x_0.

$(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})$ με $|x-x_0|<\delta$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$

$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big| \leq |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

Άρα, $|f|$ συνεχής στο x_0. Αφού αυτό συμβαίνει $\forall x_0\in\mathbb{R}$ η $|f|$ είναι συνεχής.

(ii) Αν η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ΨΕΥΔΗΣ: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

Η f δεν είναι συνεχής πουθενά ενώ η $|f|$ είναι συνεχής ως σταθερή.

(iii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής.

ΑΛΗΘΗΣ: Είναι συνεχής ως γινόμενο δύο συνεχών.

(iv) Αν η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ΨΕΥΔΗΣ: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

Η f ασυνεχής παντού, η f^2 σταθερή άρα συνεχής παντού.

(v) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ασυνεχείς παντού, τότε η $f+g$ είναι ασυνεχής.

ΨΕΥΔΗΣ: Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

Οι f, g ασυνεχείς παντού ενώ η $f+g$ συνεχής ως σταθερή.

(vi) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ασυνεχείς παντού, τότε η $f \cdot g$ είναι ασυνεχής.

ΨΕΥΔΗΣ: Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

Οι f, g ασυνεχείς παντού ενώ η $f \cdot g$ συνεχής ως σταθερή.

(vii) Αν $\lim_{x\to 0} f(x) = L$, τότε $\lim_{x \to 0} f(x^2) = L$.

ΑΛΗΘΗΣ: Έστω $\epsilon > 0$. Εφόσον $\lim_{x \to 0} f(x) = L$, $\exists \delta_1 > 0$ ώστε

$\forall x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - 0| < \delta_1$ να ισχύει $|f(x) - L| < \epsilon$ (I)

Θέτουμε $\delta = \sqrt{\delta_1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - 0| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |x^2| < \delta_1^{\,2} \overset{(I)}{\Longrightarrow} |f(x^2) - L| < \epsilon$

Άρα, $|f(x^2) - L| < \epsilon$.

(viii) Αν $\lim_{x \to 0} f(x^2) = \ell$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$.

ΨΕΥΔΗΣ: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x^2) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$. Όμως, η f δεν έχει όριο στο 0 εφόσον $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Άσκηση 9: Αποδείξτε ότι αν $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ και $|g(x)| \leq M$ για κάθε x, τότε $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = 0$

Απόδειξη:

Έστω $\epsilon > 0$. Εφόσον $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε

$\forall x : 0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - 0| < \epsilon / M$.

Έτσι $\forall x$ με $0 < |x - a| < \delta$ ισχύει $|f(x) g(x) - 0| \leq |f(x)| \cdot \underbrace{|g(x)|}_{\leq M} < \epsilon$ [illegible] $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = 0$.

Άσκηση 10: Έστω $\alpha<\beta$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{x^4+1}{x-\alpha}+\frac{2x^2+3}{x-\beta}=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β).

Απόδειξη:

$(x^4+1)(x-\beta)+(2x^2+3)(x-\alpha)=0$

$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(x^4+1)(x-\beta)+(2x^2+3)(x-\alpha)$ f συνεχής ως πολυωνυμική

$f(\alpha)=(\alpha^4+1)(\alpha-\beta)<0$ και $f(\beta)=(2\beta^2+3)(\beta-\alpha)>0$

Από θεώρημα Bolzano $\exists x\in(\alpha,\beta)$ με $f(x)=0 \Rightarrow (x^4+1)(x-\beta)+(2x^2+3)(x-\alpha)=0$

$\Rightarrow \frac{x^4+1}{x-\alpha}+\frac{2x^2+3}{x-\beta}=0$. Άρα το x λύνει αυτή τη σχέση.

Άσκηση 11: Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\theta>0$ με $\theta\in\mathbb{Q}$ ώστε $f(x)>g(x)+\theta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη:

Η $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή $\exists x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $\underset{f(x)-g(x)}{\underset{\parallel}{h(x)}} \geq h(x_0)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

$h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)>0$, άρα από πυκνότητα ρητών στο $\mathbb{R}$ $\exists\theta\in\mathbb{Q}$ με $0<\theta<h(x_0)$. Έτσι, $f(x)-g(x)=h(x)\geq h(x_0)>\theta$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

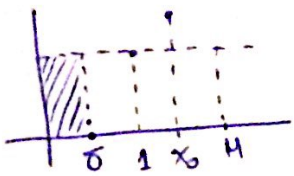
$\Rightarrow f(x)>g(x)+\theta$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Άσκηση 12: Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Αν $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ να αποδείξετε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή.

Απόδειξη:

$f(1)>0$. Εφόσον $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

$\exists\delta>0$ (το οποίο επιλέγουμε ώστε $\delta<1$) ώστε $\forall x\in(0,+\infty)$ με $0<|x-0|<\delta$ ισχύει $|f(x)-0|<f(1) \Rightarrow f(x)<f(1)$



Εφόσον $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ υπάρχει $M>0$ (το οποίο επιλέγουμε ώστε $M>\delta$) ώστε $\forall x\in(0,+\infty)$ με $x>M$ να ισχύει $|f(x)-0|<f(1) \Rightarrow f(x)<f(1)$

Η f συνεχής στο $[\delta,M]$ άρα από το θεώρημα μέγιστης τιμής $\exists x_0\in[\delta,M]$ ώστε $f(x)\leq f(x_0)$ $\forall x\in[\delta,M]$

$f(1)\leq f(x_0)$

Για $0<x<\delta$ ισχύει $f(x)<f(1)<f(x_0)$

Για $x>M$ ισχύει $f(x)<f(1)\leq f(x_0)$

Έτσι $\forall x>0$ ισχύει $f(x)\leq f(x_0)$ δηλαδή λαμβάνει μέγιστη τιμή στο x_0.

Άσκηση 13: Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $f(\xi)=\xi$.

Απόδειξη:

Ορίζουμε $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x$.

Μοναδικότητα: Εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα υπάρχει το πολύ ένα $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

Ύπαρξη: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

(Εφόσον f φθίνουσα είτε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ για κάποιο $a\in\mathbb{R}$ είτε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$)

Εφόσον $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ $\exists M_1>0$ ώστε $g(x)>1$ $\forall x\leq -M_1$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ $\exists M_2>0$ ώστε $g(x)<-1$ $\forall x\geq M_2$

$\xi\in[-M_1, M_2]$ ώστε $g(\xi)=0$.

Άσκηση 14: Δίνεται ένα πολυώνυμο αρτίου βαθμού με θετικό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, δηλαδή $P(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\dots+a_1x+a_0$ με $a_{2n}>0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση P λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη:

$\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ P συνεχής

Θέτουμε $M=P(0)=a_0$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ $\exists M_1>0$ ώστε $P(x)>M$ $\forall x<-M_1$.

Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ $\exists M_2>0$ ώστε $P(x)>M$ $\forall x>M_2$.

Η συνεχής συνάρτηση $P(x)$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο $[-M_1, M_2]$ δηλαδή $\exists x_0\in[-M_1, M_2]$ ώστε $P(x)\geq P(x_0)$ $\forall x\in[-M_1, M_2]$.

Εφόσον $-M_1 < 0 < M_2$ ισχύει $P(x_0) \leq P(0)$

Επίσης $\forall x > -M_1$ $P(x) > M = P(0) \geq P(x_0)$

και $\forall x < M_2$ $P(x) \geq M = P(0) \geq P(x_0)$

Άρα, $P(x) \geq P(x_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 15: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε να ισχύει $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Να υπολογίσετε το $f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$. Να γίνει πλήρης δικαιολόγηση.

Απόδειξη:

Επιλέγουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}$ με $x_n \to \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Εφόσον f συνεχής στο $\frac{\sqrt{3}}{9}$ $f(x_n) \to f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) \Rightarrow \boxed{x_n^2 \to f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}$

Όμως, $x_n \to \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_n^2 \to \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2 \Rightarrow \boxed{x_n^2 \to \frac{1}{27}}$

Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας προκύπτει $f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{1}{27}$.

Άσκηση 16: Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $\cos\xi = \xi$. Μπορείτε να συμπεράνετε ότι $\xi \in (0,1)$;

Απόδειξη:

Με Θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$.

Άσκηση 19: Δίνεται ότι για τη συνάρτηση $f: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ισχύει $(x\tan x) f(x) - x^2 + x = x(e^{7x} - x)$ για κάθε x. Να εξηγήσετε γιατί η f είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$ και να βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

Απόδειξη:

$x\tan x f(x) - \cancel{x^2} + x = xe^{7x} - \cancel{x^2}$

Για $x \neq 0$ $\tan x f(x) + 1 = e^{7x}$

και $\tan x \neq 0$ άρα $f(x) = \dfrac{e^{7x} - 1}{\tan x}$ $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$ $x \neq 0$.

Για $x_0 \neq 0$ η f συνεχής στο x_0 ως πηλίκο συνεχών

Η f είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0} 7 \frac{e^{7x} - 1}{7x \dfrac{\sin x}{x\cos x}} = \lim_{x\to 0} 7 \cdot \frac{e^{7x} - 1}{7x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \cos x = 7$$

Η f συνεχής στο 0 αν και μόνο αν $f(0) = 7$.

Άσκηση 20: Έστω $f,g:[0,1]\to[0,1]$ δύο συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες $f\circ g=g\circ f$ και η συνάρτηση f είναι αύξουσα. Να δειχθεί ότι οι f,g έχουν κοινό σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ ώστε $f(\xi)=\xi$ και $g(\xi)=\xi$.

Απόδειξη:

Εφαρμόζοντας Bolzano για την $g(x)-x$ $\exists x_1\in[0,1]$ με $g(x_1)=x_1$.

Ορίζουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με πρώτο όρο x_1 και $x_{n+1}=f(x_n)$

Αν $x_1\le f(x_1)$ χρησιμοποιώντας επαγωγή ορίζουμε ότι η x_n είναι αύξουσα. Σε αντίθετη περίπτωση αν $x_1>f(x_1)$ με επαγωγή αποδεικνύεται ότι η x_n είναι φθίνουσα. Συνεπώς, η x_n είναι μονότονη.

Ισχυρισμός: $\forall n$ $g(x_n)=x_n$.

Για $n=1$ $g(x_1)=x_1$ ισχύει

Έστω $g(x_n)=x_n$ και θα δείξουμε ότι $g(x_{n+1})=x_{n+1}$

$$g(x_{n+1})=g(f(x_n))=(g\circ f)(x_n)=(f\circ g)(x_n)=f(g(x_n))=f(x_n)=x_{n+1}$$

Άρα, ισχύει $\forall n\in\mathbb{N}$.

x_n μονότονη και φραγμένη άρα συγκλίνουσα.

$$x_n\to\xi \text{ με } \xi\in[0,1]$$

Από αρχή της μεταφοράς $g(x_n)\to g(\xi) \Rightarrow \boxed{x_n\to g(\xi)}$

$f(x_n)\to f(\xi) \Rightarrow x_{n+1}\to f(\xi)$

Επίσης $x_{n+1}\to\xi$ άρα $\boxed{f(\xi)=\xi}$

$$\left.\begin{array}{l} x_n\to\xi \\ x_n\to g(\xi)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{g(\xi)=\xi}$$

Άρα, $f(\xi)=g(\xi)=\xi$.